

1. cvičení - výsledky

Příklad 1.

- (a) M je uzavřená a není otevřená. $\text{Int}(M) = \emptyset$ a $H(M) = M$.
- (b) M je uzavřená a není otevřená. $\text{Int}(M) = \emptyset$ a $H(M) = M$.
- (c) M je otevřená a není uzavřená. Hranice je $\{0, 1\}$, $\overline{M} = [0, 1]$.
- (d) M je uzavřená a není otevřená. Hranice je $\{0, 1\}$, $\text{Int } M = (0, 1)$.
- (e) M není ani otevřená, ani uzavřená. A $\overline{M} = [0, 1]$, $\text{Int } M = (0, 1)$.
- (f) M je otevřená a není uzavřená, $\overline{M} = [0, +\infty)$.
- (g) M je uzavřená a není otevřená, $\text{Int } M = (0, +\infty)$, $H(M) = \{0\}$.
- (h) M je otevřená, i uzavřená, hranice je prázdná.
- (i) M je uzavřená a není otevřená, $H(M) = M$, $\text{Int } M = \emptyset$.
- (j) M není ani uzavřená, ani otevřená. $\text{Int}(M) = \emptyset$ a uzávěr je celý prostor.
- (k) M není ani uzavřená, ani otevřená. $\text{Int}(M) = \emptyset$ a uzávěr je celý prostor.
- (l) M není ani uzavřená, ani otevřená, $H(M) = M \cup \{0\} = \overline{M}$ a $\text{Int } M = \emptyset$.
- (m) M není ani uzavřená, ani otevřená, $H(M) = M \cup \{[0, 0]\} = \overline{M}$ a $\text{Int } M = \emptyset$.
- (n) M je uzavřená a není otevřená, $H(M) = M = \overline{M}$ a $\text{Int } M = \emptyset$.

Příklad 2.

- (a) jde o přímky $y = ax, a \in \mathbb{R}$, tedy se zkoumá spojitost fce $f(x, ax)$ v 0.
- (b) Z definice.

Příklad 3.

- (a) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou rovnoběžné přímky. Funkce je spojitá na D_f .
- (b) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou ramena úhlů, která jsou rovnoběžná s osami x a y . Funkce je spojitá na D_f .
- (c) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; y \geq 0\}$. Vrstevnice jsou poloviny parabol, posouvající se po ose x . Funkce je spojitá na D_f .
- (d) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku. Funkce je spojitá na D_f .
- (e) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; (x \geq 0 \wedge y \geq 0) \vee (x \leq 0 \wedge y \leq 0)\}$. Vrstevnice jsou hyperboly tvaru $y = \frac{c}{x}, c > 0$ a obě osy. Funkce je spojitá na D_f .

- (f) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 \leq 1\}$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku a poloměrem nejvýše 1. Funkce je spojitá na D_f .
- (g) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 > 1\}$. Vrstevnice jsou kružnice se středem v počátku a poloměrem větším než 1. Funkce je spojitá na D_f .

Příklad 4.

- (a) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \neq 0\}$. Vrstevnice jsou přímky procházející počátkem. Funkce je spojitá na D_f .
- (b) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou hyperboly, tj. $y = \frac{c}{x}, c \in \mathbb{R}$.
- (c) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; -x^2 - 1 \leq y \leq -x^2 + 1\}$. Vrstevnice jsou dvojice parabol, v jednom případě parabola. Funkce je spojitá na D_f .
- (d) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 2k\pi x^2 + y^2 \leq (2k+1)\pi \text{ pro nějaké } k \in \mathbb{N}_0\}$. Vrstevnice jsou posloupnosti kružnic. Funkce je spojitá na D_f .
- (e) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou tři: Pro $c = 0$ jde o přímky $x = k\pi$ a $y = pi, k \in \mathbb{Z}$. Pro $c = -1$ jde o množinu $\{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (-\pi + 2k\pi, 2k\pi), y \in (2l\pi, \pi + 2l\pi), k, l \in \mathbb{Z}\} \cup \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; x \in (2k\pi, \pi + 2k\pi), y \in (-\pi + 2l\pi, 2l\pi), k, l \in \mathbb{Z}\}$. Pro $c = 1$ jde o zbytek $\mathbb{R}^2$. Pro ostatní c žádné vrstevnice nejsou. Funkce je spojitá na každé množině odpovídající vrstevnici pro $c = \pm 1$, jinde není.
- (f) $D_f = \mathbb{R}^2$. Vrstevnice jsou grafy funkcí $y = c - |x|, c \in \mathbb{R}$. Funkce je spojitá na D_f .
- (g) $D_f = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2; 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$. Vrstevnice jsou dvojice kružnic, v jednom případě kružnice. Funkce je spojitá na D_f .

Příklad 5.

- (a) Není ani otevřená, $\text{Int } M = \{x > 0, y < 0\}, H(M) = \{x = 0 \text{ nebo } y = 0\}$.
- (b) M je uzavřená a není otevřená, $\text{Int } M = \emptyset, H(M) = M$.
- (c) M není uzavřená ani otevřená, $\text{Int } M = \emptyset, H(M) = M \cup \{[1, 0]\}$.
- (d) M je otevřená, $\text{Int } M = M, H(M) = \{\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1\}$.
- (e) M je uzavřená, $\text{Int } M = \{x^2 + y^2 > 9\}, H(M) = \{x^2 + y^2 = 9\}$.
- (f) M je otevřená, $\text{Int } M = M, H(M) = \{x^2 + e^y = 17\}$.
- (g) M je uzavřená, $\text{Int } M = \emptyset, H(M) = M$.
- (h) M je uzavřená, $\text{Int } M = \{x > y\}, H(M) = \{x = y\}$.
- (i) M je otevřená, $\text{Int } M = \{x + y < 0\}, H(M) = \{x + y = 0\}$.
- (j) M není uzavřená ani otevřená, $\text{Int } M = \emptyset, H(M) = \{x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0, y = 2 - x\}$.

Příklad 6.

- (a) M je otevřená, $H(M) = \{x^2 + y^2 = 4\} \cup \{x^2 + y^2 = 1\}$. Jedná se o mezikružší.
- (b) M je otevřená, $H(M) = \{x - y = 0\} \cup \{-x + y = 3\}$. Jedná se o prostor mezi dvěma přímkami.
- (c) M je uzavřená, $H(M) = \{y = x^2\} \cup \{y = x^2 + 1\}$, $\text{Int } M = \{x^2 < y < x^2 + 1\}$. Jedná se o prostor mezi dvěma parabolami.
- (d) M je otevřená, $H(M) = \{|x| = 1\}$. Jedná se o dvě oddělené poloroviny.

Příklad 7.

- (a) Např. $A = [1, 2], B = [2, 3]$.
- (b) Např. $A = [1, 2], B = [2, 3]$.
- (c) Např. $A = (1, 2), B = (2, 3)$.
- (d) Uzávěr zachovává uspořádání množin a uzávěr uzavřené množiny je množina.
- (e) Uzávěr zachovává uspořádání množin.
- (f) Doplněk otevřené je uzavřená a naopak. Interior zachovává uspořádání množin a interior otevřené množiny je množina.
- (g) Použijte vhodně (f), De Morganovy vzorce a (d).
- (h) Interior zachovává uspořádání množin. Interior množiny je největší otevřená množina obsažená v dané množině.
- (i) Typická nespojitá funkce.
- (j) Hodnota maxima.
- (k) $\frac{x}{|x|}$.